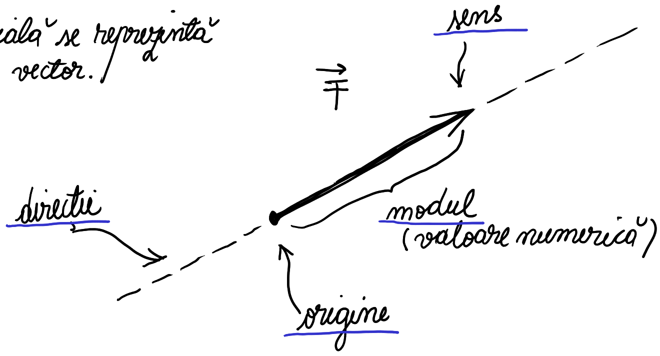
# ELEMENTE DE CALCUL VECTORIAL

- mărime scalară: – valoare numerică
  – unitate de măsură

- mărime vectorială: – valoare numerică
  – unitate de măsură
  – direcție } – orientare în spațiu
  – sens }

## 1. ELEMENTELE UNUI VECTOR

O mărime vectorială se reprezintă printr-un vector.



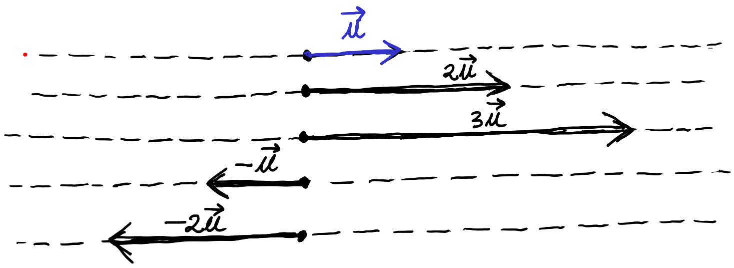

$F$ = modulul lui $\vec{F}$

$|\vec{F}|$ = modulul lui $\vec{F}$

$\vec{F}$ = vectorul $\vec{F}$

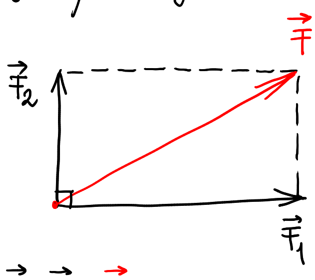
## 2. OPERAȚII CU VECTORI

### 2.1. ÎNMULȚIREA VECTORILOR CU SCALARI




### 2.2. ADUNAREA VECTORILOR

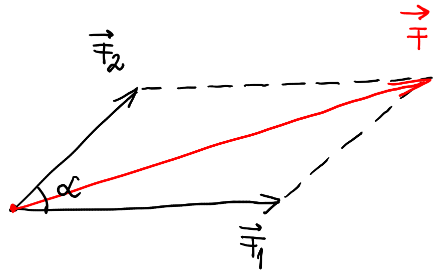
Regula paralelogramului




$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}$

$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$

teorema lui Pitagora

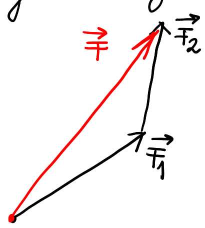



$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}$

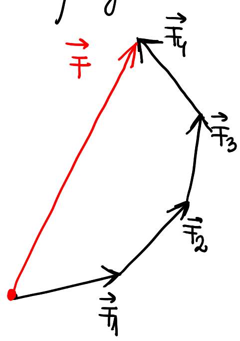
$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}$

teorema lui Pitagora generalizată

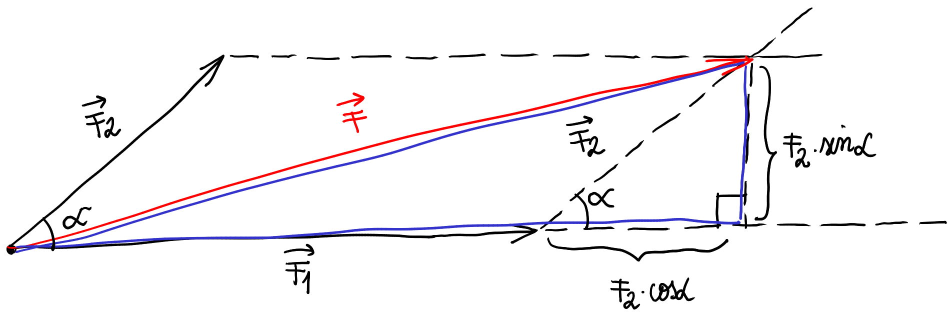
Regula triunghiului

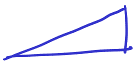



Regula poligonului



# Regula paralelogramului (DEMONSTRAȚIE)



Pitagora:

$$ip^2 = CA^2 + CO^2$$

$$F^2 = (F_1 + F_2\cos\alpha)^2 + (F_2\sin\alpha)^2$$

$$F^2 = F_1^2 + 2F_1F_2\cos\alpha + F_2^2\cos^2\alpha + F_2^2\sin^2\alpha$$

$$F^2 = F_1^2 + 2F_1F_2\cos\alpha + F_2^2\underbrace{(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}_{1}$$

$$\Rightarrow F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}$$

APLICAȚIE NUMERICĂ

$$\vec{1} + \vec{1} = ?$$

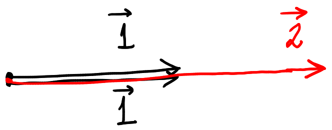
Fie $F_1 = 1$

$F_2 = 1$

$\vec{F}_1, \vec{F}_2$ cu diferite orientări

Aflați rezultanta celor două forțe!

$\boxed{\alpha = 0^\circ}$

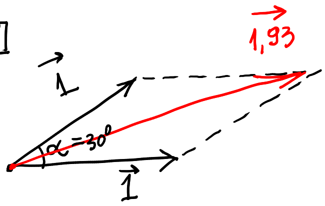



$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cdot \cos\alpha}$$

$$F = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cancel{\cos 0}^{\,1}}$$

$$F = 2$$

$\boxed{\alpha = 30^\circ}$

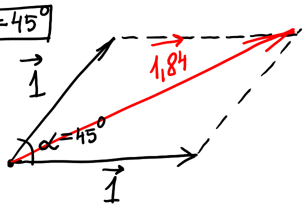



$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cdot \cos\alpha}$$

$$F = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$F = 1{,}93$$

$\boxed{\alpha = 45^\circ}$

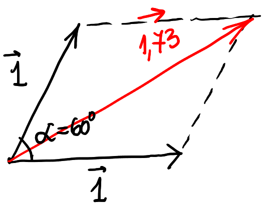



$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cdot \cos\alpha}$$

$$F = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$F = 1{,}84$$

$\boxed{\alpha = 60^\circ}$

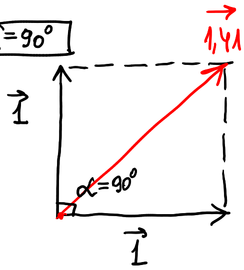



$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cdot \cos\alpha}$$

$$F = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}}$$

$$F = 1{,}73$$

$\boxed{\alpha = 90^\circ}$

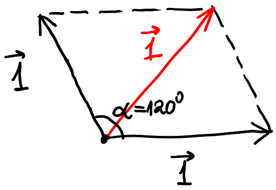



$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cdot \cos\alpha}$$

$$F = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0}$$

$$F = 1{,}41$$

$\boxed{\alpha = 120^\circ}$

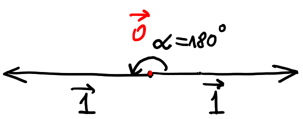



$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cdot \cos\alpha}$$

$$F = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$F = 1$$

$\boxed{\alpha = 180^\circ}$

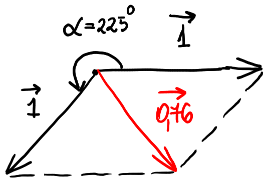



$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cdot \cos\alpha}$$

$$F = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1)}$$

$$F = 0$$

$\boxed{\alpha = 225^\circ}$

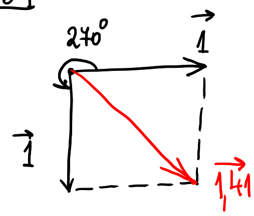



$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cdot \cos\alpha}$$

$$F = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$F = 0{,}76$$

$\boxed{\alpha = 270^\circ}$




$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cdot \cos\alpha}$$

$$F = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0}$$

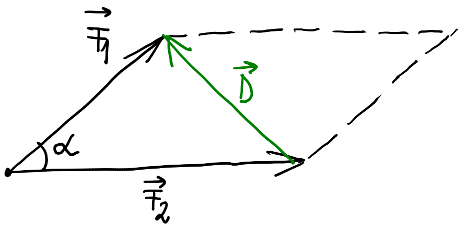
$$F = 1{,}41$$

## 2.3. SCĂDEREA VECTORILOR

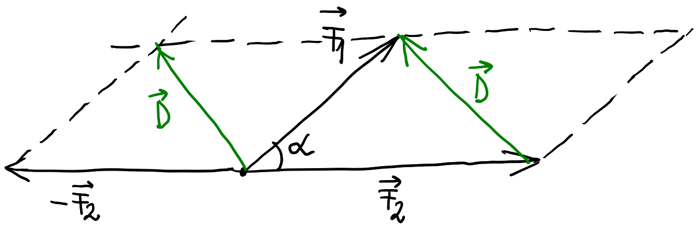
$$\vec{D}=\vec{F}_1-\vec{F}_2$$

$$\vec{D}=\vec{F}_1+(-\vec{F}_2)$$

$\vec{D}$ – vectorul diferență




DEMONSTRAȚIE

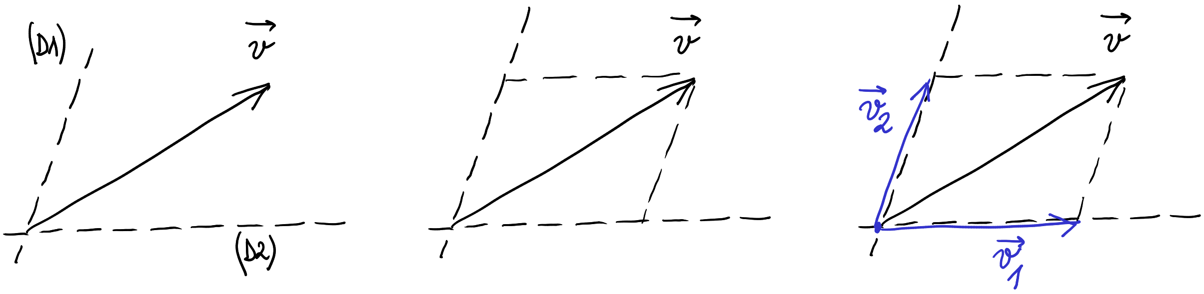



$$D=\sqrt{F_1^2+(-F_2)^2+2\cdot F_1\cdot(-F_2)\cdot\cos\alpha}$$

$$D=\sqrt{F_1^2+F_2^2-2F_1F_2\cos\alpha}$$

*Observații:* Vectorul $\vec{D}$ are mereu sensul spre descăzut

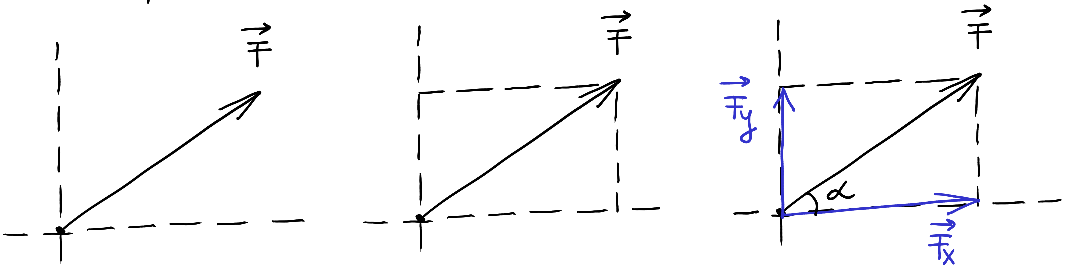
## 2.4. DESCOMPUNEREA VECTORILOR




Mai sus vectorul $\vec{v}$ a fost descompus în componentele $\vec{v_1}$ și $\vec{v_2}$ după direcțiile oarecare (D1) și (D2).

$$\vec{v} = \vec{v_1} + \vec{v_2}$$

⚠ Caz particular




$$\cos\alpha = \frac{CA}{IP} = \frac{F_x}{F}$$

$$\Rightarrow \boxed{F_x = F\cos\alpha}$$

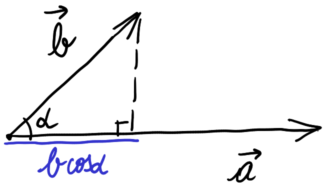
$$\sin\alpha = \frac{CO}{IP} = \frac{F_y}{F}$$

$$\Rightarrow \boxed{F_y = F\sin\alpha}$$

Mai sus vectorul $\vec{F}$ a fost descompus în componentele $\vec{F_x}$ și $\vec{F_y}$ după două direcții perpendiculare.

$$\vec{F} = \vec{F_x} + \vec{F_y}$$

# 2.5. PRODUSUL SCALAR și PRODUSUL VECTORIAL




$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = a\cdot b\cdot\cos\alpha}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a\cdot(b\cos\alpha)$$

Observația 1. $\alpha=0^\circ \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = a\cdot b\cdot \overset{1}{\cancel{\cos 0^\circ}}$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = a\cdot b$

produs scalar maxim

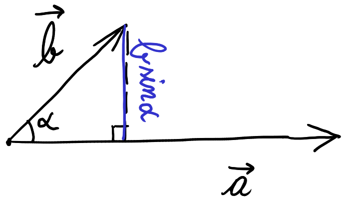
Observația 2. $\alpha=90^\circ \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = a\cdot b\cdot \overset{0}{\cancel{\cos 90^\circ}}$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

produs scalar nul

$$\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

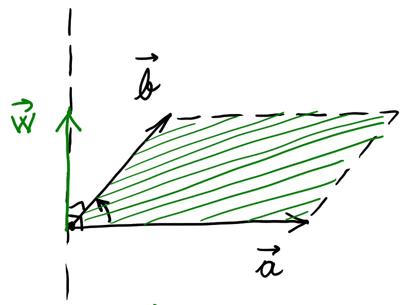
Produsul scalar este o măsură a cât de mult un vector participă la $\boxed{\text{translația}}$ în direcția celuilalt vector.




$A_{\square} = b\cdot h = a\cdot(b\sin\alpha)$

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b} = \vec{w}}$$

- modulul lui $\vec{w}$ $\quad w = a\cdot(b\cdot\sin\alpha) = A_{\square}$
- direcția lui $\vec{w}$ $\quad \begin{cases} \vec{w}\perp\vec{a} \\ \vec{w}\perp\vec{b} \\ \vec{w}\perp A_{\square} \end{cases}$
- sensul lui $\vec{w}$ : sens dat de regula burghiului




$|\vec{w}| = A_{\square}$

Observația 1 $\alpha=0^\circ \Rightarrow \vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$

produs vectorial nul

Observația 2 $\alpha=90^\circ \Rightarrow |\vec{w}| = a\cdot b\cdot \overset{1}{\cancel{\sin 90}}$

$|\vec{w}| = a\cdot b$

produs vectorial maxim

Produsul vectorial este o măsură a cât de mult un vector participă la $\boxed{\text{rotația}}$ celuilalt vector.

# MIȘCARE ȘI REPAUS

## SISTEME DE REFERINȚĂ. DEPLASARE. VECTORUL DE POZIȚIE, VITEZĂ, ACCELERAȚIE

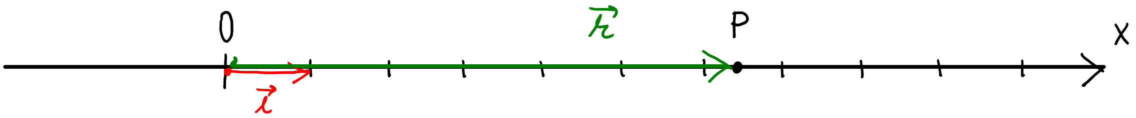
mișcare mecanică = procesul care constă în $\boxed{\text{modificarea poziției unor corpuri față de alte corpuri}}$ într-un interval de timp dat

corp de referință (O) = corpul în raport cu care se determină poziția altui corp

punct material (P) = modelul unui corp ale cărui dimensiuni geometrice se pot neglija fiind caracterizat doar prin masa sa

sistem de referință = un sistem care include axe de coordonate, un reper și un instrument de măsurare a timpului

• sistem de referință unidimensional (1D)

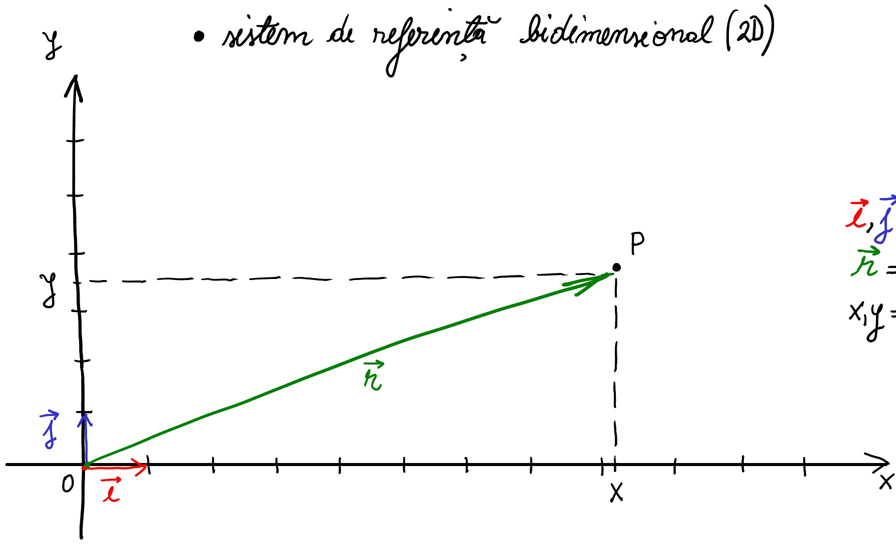



$\vec{i}$ = versor (vector unitate)
$\vec{r}$ = vector de poziție
x = coordonata de poziție

$$\boxed{\vec{r} = x \cdot \vec{i}}$$

$$|\vec{r}| = x$$

• sistem de referință bidimensional (2D)

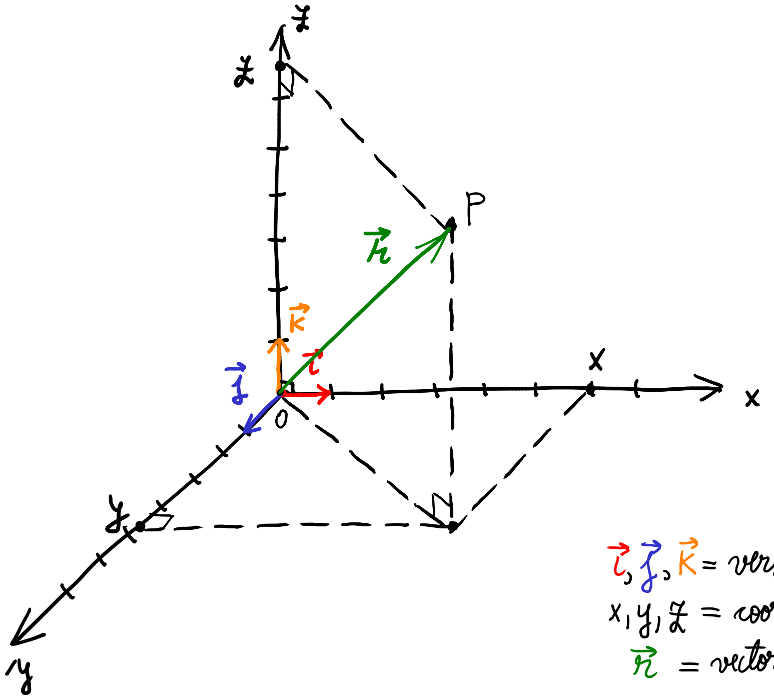



$\vec{i}, \vec{j}$ = versori (vectori unitate)
$\vec{r}$ = vector de poziție
x, y = coordonatele de poziție

$$\boxed{\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}}$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

• sistem de referință tridimensional (3D)




$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ = versori

x, y, z = coordonate de poziție

$\vec{r}$ = vector de poziție

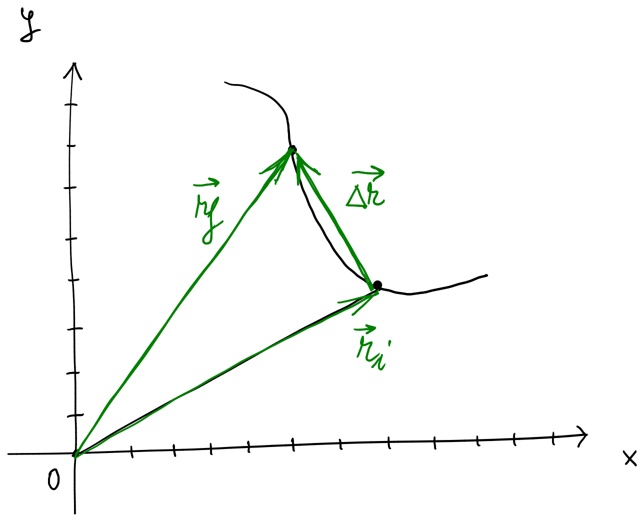
$$\boxed{\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\cdot\vec{k}}$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Dacă coordonatele de poziție se schimbă în timp, atunci:

$$\vec{r}(t) = x(t)\cdot\vec{i} + y(t)\cdot\vec{j} + z(t)\cdot\vec{k}$$

# VECTORUL DEPLASARE




$\vec{r_i}$ – vectorul de poziție inițial

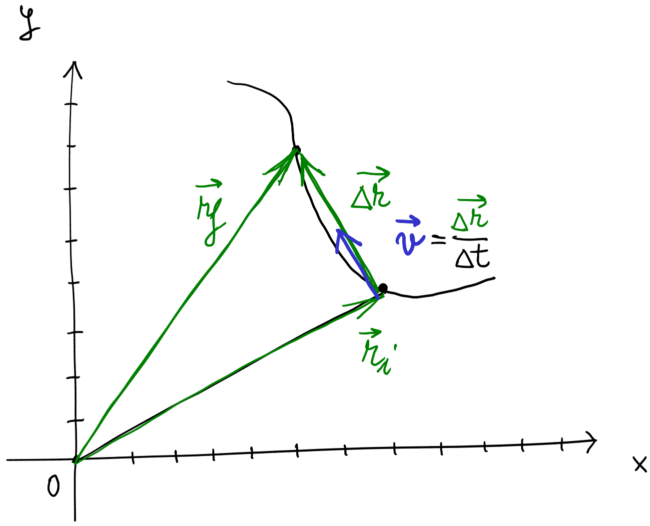
$\vec{r_f}$ – vectorul de poziție final

$\vec{\Delta r}$ – vectorul deplasare

$$\boxed{\vec{\Delta r} = \vec{r_f} - \vec{r_i}}$$

$$\boxed{\vec{\Delta r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}$$

# VECTORUL VITEZĂ



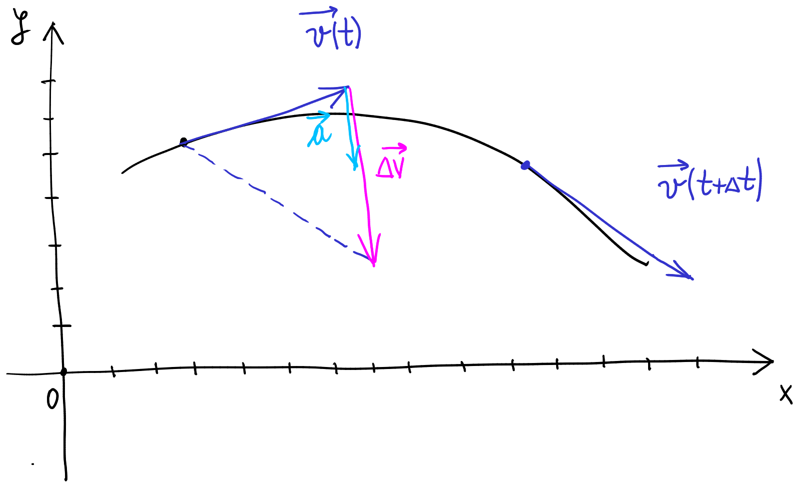

$$\boxed{\vec{v} = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}}$$

$\vec{v}$ = vectorul viteză medie
$\vec{\Delta r}$ = vectorul deplasare
$\Delta t$ = timpul mișcării

$\Delta t \to 0 \Rightarrow \vec{v}$ = vectorul viteză instantanee

timp de mișcare
foarte scurt

# VECTORUL ACCELERAȚIE




$$\boxed{\vec{a} = \frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t}}$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}}$$

$\vec{a}$ = vectorul accelerației medii

$\vec{\Delta v}$ = vectorul variației vitezei

$\Delta t$ = timpul

$\Delta t \to 0 \Rightarrow \vec{a}$ = vectorul accelerație instantanee

timp de variație foarte scurt